NAAME2016-XXXX

تخمین ناحیه جذب یک مدل اقتصادی غیر خطی با استفاده از توابع لیاپانوف

رضا خمسلو* [1]، لاریسا خدادادی ، زهره خواجه سعید [3]،

[1] دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مکانیک رشته مکاترونیک، دانشگاه آزاد اسلامی ، تبریز ، ایران،
rezakhamselo@yahoo.com،
[2] استاد یار ،گروه برق ، دانشگاه آزاد اسلامی ، تبریز ، ایران
[3] عضو هیئت علمی ، گروه اقتصاد ، دانشگاه آزاد اسلامی ، مراغه ، ایران

چکیده

در این مقاله , یک روش جدید تخمین ناحیه جذب برای یک مدل اقتصادی غیر خطی ارائه شده است . و تابع لیاپانوف را با یک روش مرسوم بدست آورده و سپس برای سهولت در محاسبات با استفاده از sostools متلب[1] حداکثر تابع را پیدا کرده و در آخر با استفاده از pplane8 نتایج نشان داده شده است.

واژه های کلیدی: مدل اقتصادی غیر خطی , توابع لیاپانوف , LMI , تخمین ناحیه جذب , تئوری لحظه ها .

۱. مقدمه

تحلیل پایداری سیستم های غیر خطی با روش پر کاربرد و قدرتمند لیاپانوف انجام می شود . هر سیستمی در کل دارای یک نقطه تعادل و یک محدوده جذب است که برای تحلیل پایداری باید تعیین و تخمین زده شود . در طی سال های اخیر مطالعات متعددی در مورد تخمین ناحیه جذب حول نقطه تعادل در سیستم های (درجه دو , مکعبی , چند جمله و مستقل) انجام شده است . در genesio و vicino (۱۹۸۴) روش های محاسبه هندسی تخمین ناحیه جذب پیشنهاد شده است , که شامل سیستم های خطی درجه دو , مکعبی , و تمام سیستم های درجه n است .

در chiang و thorp (۱۹۸۹) , Davidson و kurak (۱۹۷۱) و Michel , sarabudlla , وmiller (۱۹۸۲) : برخی روش های مختلف دیگر نیز استفاده شده است , اما این روش ها ساختار سنگینی دارند و عملا فقط مناسب سیستم های سطح پایین هستند , در chiang , Hirsch و wu (۱۹۸۸) , genesio , taraglia , و vicino (۱۹۸۵) . راه های جایگزینی بر اساس بررسی دقیق ساختار فضای برداری برای تخمین ناحیه جذب پیشنهاد شده است . اخیرا نیز بیشتر به مسئله تخمین ناحیه جذب سیستم های چند جمله پرداخته اند که با ماتریس خطی LMIs حل می شود , نمونه عملی آن در chesi , garulli , tesi , و vicino , ۲۰۰۵ tesi , villoresi , و genesio ۱۹۹۶ tibken ۲۰۰۰ موجود می باشد .

همان طور که در بالا ذکر کردیم مسئله در دو مرحله محاسبه می شود :

۱ : انتخاب تابع درجه دوم لیاپانوف , که در اصل اثبات پایداری مجانبی در نقطه تعادل است .
۲ : محاسبه تخمین ناحیه جذب , تابع مخصوص لیاپانوف به پیدا کردن آن کمک می کند .

[1] sum-of-squares constraints

هر چند انتخاب تابع لیاپانوف کار آسانی نیست و ممکن است تاثیر محافظه کارانه ای روی تخمین ناحیه جذب بگذارد . در این خصوص Michel et al (۱۹۸۲) راه حلی برای انتخاب تابع لیاپانوف درجه دو ارائه دادند که نقش مهمی در تخمین ناحیه جذب داشت که الزاما با مسئله ای غیر از مسئله بهینه سازی محدب حل می شد . در vicino , chesi , tesi ,(۲۰۰۲) و chesi (۲۰۰۵) روش کم کاربردی ارائه دادند که با الگوریتم جستجو , تابع درجه دوم لیاپانوف را مانند پیدا کردن اولین کاندید تابع لیاپانوف به خوبی محاسبه می کرد , مشکل این روش این بود که بدون سیستم های چند جمله ای (درجه دوم) [1] به راحتی قابل بحث نیست .

به طورکلی تعیین و تخمین ناحیه جذب کار بسیار سختی است , در دهه های آخیر مطالعات علمی زیادی بر روی تخمین ناحیه جذب انجام شده است و روش های زیادی برای این منظور پایه گذاری شده است , که طبق این مطالعات بهترین روش استفاده از توابع لیاپانوف است[2] .

اگر چه تحلیل پایداری با استفاده از حداکثر تابع لیاپانوف کار آسانی است , اما پیدا کردن آن کار خیلی مشکلی است , مانند [3] , این تابع مجاور توابع گویا می باشد , از این رو می توانیم با معادلات جزئی(PDE) حداکثر تابع لیاپانوف را مشخص و حل کرد . قبلا برای بهینه سازی در تخمین ناحیه جذب سیستم های دینامیکی چند جمله ای مستقل از تئوری لحظه ها استفاده می کردند , اما امروزه از روش کار آمد تر LMI برای بهینه سازی , خلاصه سازی و حل سیستم های چند جمله ای استفاده کنیم .

این مقاله از پنج بخش تشکیل شده است :

الف : مفاهیم و تعاریف پایه .

ب : قوانین لیاپانوف .

ج : توابع گویای لیاپانوف .

د : تئوری لحظه ها .

ذ : مدل اقتصادی و پیدا کردن حداکثر تابع .

الف : مفاهیم و تعاریف پایه :

محدوده جذب

سیستم زیر را داریم :

$$\dot{x} = f(x(t)) \qquad (۱)$$

نقطه $x_0 \in R^n$ نقطه تعادل برای سیستم (۱) اگر $f = (x_0) = 0$ باشد . پس ناحیه جذب بدست می آید با :

$$s = \left\{ x^0 \in R^n \middle| \lim_{t\to\infty} x(t.x^0) \to 0 \right\} \qquad (۲)$$

حالا فرض کنید v (x) یک تابع لیاپانوف برای سیستم (1) در ناحیه :

$$\Omega_c = \{ x^0 \,\|\, v(x) < 0 \} \qquad (۳)$$

اگر $\dot{v}(x)$ منفی و معین در Ω_c باشد , پس سیستم در مبدا پایدار مجانبی است , و هر نقطه در Ω_c با گذشت زمان به مبدا میل می کند $t \to \infty$

بنا بر این :

$$\dot{\mathrm{v}} = (\mathrm{x}) \ . \ x \neq 0 \quad \dot{\mathrm{v}} = (\mathrm{x}) \ . \ x \neq 0 \qquad (۴)$$

مرز ناحیه معین منفی $\dot{\mathrm{v}} = (\mathrm{x})$ تخمین ناحیه جذب را تعیین می کند [4] .

از این رو محدوده جذب را می توان مانند زیر بدست آورد :

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{c}} \ = \min \mathrm{v}(\mathrm{x}) \\ \quad \text{if} \\ \dot{\mathrm{v}} = (\mathrm{x}) \ . \ x \neq 0 \end{cases} \qquad (۵)$$

از نظر هندسی این به آن معنی است که ما مینیموم سراسری را در طول تابع لیاپانوف v (x) در سطح فوقانی (۵) جستجو کنیم . سپس , فرض می کنیم مبدا (f (x پایداری مجانبی نقطه تعادل یک تابع لیپ شیتز است .

ب : قوانین لیاپانوف

Vannelli و vidysagar [3] برای بدست آوردن ناحیه جذب روشی ارائه دادند که درجه معادلات را بزرگتر و توابع لیاپانوف را پیچیده تر می کرد . آنها اثبات کردند که تابعی وجود دارد با نام حداکثر تابع که با گذشت زمان به بی نهایت , x تقریبا نزدیک مرز δ_{s} در محدوده جذب s می شود .

در این صورت تابع $v_m = R^n \to R_+ \cup \{\infty\}$ حداکثر تابع لیاپانوف برای سیستم (۱) نامیده می شود اگر :

(۱) : $v_{\mathrm{m}}\,(0) = 0 \,.\, \mathrm{v_m}(\mathrm{x}) > 0 \ \forall_{\mathrm{x}} \in S \,.\, X \neq 0$.
(۲) : $v_{\mathrm{m}}(\mathrm{x}) < \infty \ if \ x \in S$.
(۳) : $v_{\mathrm{m}}(\mathrm{x}) \to \infty$ مانند $\mathrm{x} \to \partial_{\mathrm{s}}$. یا $|x| \to \infty$.
(۴) : $\dot{v}_{\mathrm{m}}$ در روی s معین منفی است .

حالا ما ارتباط بین ناحیه جذب و پایداری مجانبی نقطه تعادل و یک مجموعه که خواص تابع خاص را در حداکثر تابع لیاپانوف می دهد را نشان می دهیم . فرض کنید ما می توانیم مجموعه $E \subseteq R^n$ که شامل مبدا و تابع پیوسته $V(x): E \to R_+$ است را پیدا کنیم .

(۱) : $\mathrm{V}(\mathrm{x})$ معین مثبت در E .
(۲) : $\dot{\mathrm{V}}(\mathrm{x})$ معین منفی در E .
(۳) : $\mathrm{V}(\mathrm{x}) \to \infty$ مانند $\mathrm{x} \to \partial_{\mathrm{s}}$ و یا $\|x\| \to \infty$ سپس $E = S$.

ما ذکر کردیم که حداکثر تابع برای تخمین ناحیه جذب کاری مهم و ضروری است , اگر چه اثبات پایداری با حداکثر تابع لیاپانوف کاری آسان است اما پیدا کردن آن تابع کاری بسیار دشوار محسوب می شود با این وجود , طبق مطالب ذکر شده در [3] می توان ناحیه جذب را با توابع گویا تخمین زد , که در بخش بعدی به آن اشاره می کنیم .

ج : توابع گویای لیاپانوف

طبق مطالعات انجام شده پیدا کردن حداکثر تابع لیاپانوف کار مشکلی است که منحصر به پایداری مجانبی نقطه تعادل نیست . در اینجا به روش های پیدا کردن حداکثر تابع لیاپانوف اشاره می شود , در حقیقت این تابع به بی نهایت میل می کند , مانند X که نزدیک مرز δs در ناحیه جذب است .

برای به دست آوردن تابع کاندید لیاپانوف از فرمول زیر استفاده می شود :

$$V\,(x) = \frac{N\,(X)}{D\,(X)} \tag{۶}$$

هر جا $N\,(X)$ و $V\,(X)$ چند جمله ای باشند از فرمول زیر استفاده می کنیم :

$$V\,(X) = \frac{\sum_{I=2}^{V} R_i}{1+\sum_{i=1}^{V-2} Q_i} \tag{۷}$$

R_i و Q_i و $i = 1 \,....\, V$ تابع همگن با درجه i هستند . زیرا $V\,(X)$ باید به شرط لیاپانوف صدق کند , و $\dot{V}\,(x)$ معین منفی باشد , بنابراین از فرمول زیر استفاده می کنیم :

$$\dot{V}\,(X) = -X^{t}QX \qquad\qquad Q > 0 \tag{۸}$$

ما فرض می کنیم $F(X)$ به این ترتیب تحلیل می شود : $\dot{X} = F\,(X) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i\,(x)\,.\,X \in R^n$ و $F_i(x)$ تابع همگن درجه i است , همچنین ما داریم :

$$[(1+\sum_{i=1}^{\infty} Q_i)\sum_{i=2}^{\infty}(\nabla R_i)^T - (\sum_{i=1}^{\infty}(\nabla Q_i)^T)\sum_{i=1}^{\infty} R_i]\sum_{i=2}^{\infty} F_i = -X^T QX(1+\sum_{i=1}^{\infty} Q_i)^2 \tag{۹}$$

برای حل PDE , باید چند جمله ای ها را با همان درجه k از سمت چپ تا راست مقایسه کنیم :

$$(\nabla R_2)^T F_1 = -X^T QX \;\;.\;\; K = 2 \tag{۱۰}$$

$$(\nabla R_2)^T F_{K-1} + \sum_{J=3}^{K}((\nabla R_J)^T + F_{K-J+1} = \sum_{i=1}^{J-2}(Q(\nabla R_{J-I})^T - (\nabla Q_I)^T R_{J-i})) - X^T QX(2Q_{K-2} + \sum_{i=1}^{K-3} Q_i Q_{K-2-i}) \;\; K \geq 3 \tag{۱۱}$$

در معادله (۱۰) و (۱۱) مراحل محاسبه رابطه برگشتی بیان شده است , ما باید R_i و Q_i و در دوره ای از R_j و Q_J , $J < i$ بدست بیاوریم .

$$A_n Y = b_n \tag{۱۲}$$

در اینجا A_n ماتریس $m*n$ و $m < n$ است, رابطه بازگشتی (۱۱) حاصل انتخاب چندین درجه آزادی در R_i و Q_j است .

یک راه محدود ترکردن انتخاب R_j و Q_j مشتق گیری از V_V است .

$$\dot{V}_v = -X^T QX + \frac{e(x)}{\left(1+\sum_{i=1}^{v-2} Q_i\right)^2} \qquad (۱۳)$$

اینجا $e(x)$ مجموع چند جمله با درجه بزرگتر نسبت به v است . در واقع ما می توانیم توابع همگن R_i و $Q_{i-2} > 3$ را طوری انتخاب کنیم که ضرایب R_i و Q_{i-2} بر مسئله کمینه سازی محدود صدق کند .

$$\begin{cases} \mathrm{mine}_n(y) \\ \text{با شرط} \\ A_N Y = b_n \end{cases} \qquad (۱۴)$$

در [3] اثبات شده است که $V_{v's}$ تابع لیاپانوف است , بنابراین می توان با مسئله کمینه سازی (۱۴) یک تابع لیاپانوف با دقت قابل قبول بدست آورد .

اما چگونه ناحیه جذب را تخمین بزنیم ؟

مسئله (5) را در نظر بگیرید , اگر ما از تابع لیاپانوف گویا ی موجود در بخش (۱۴) استفاده کنیم , مسئله به معادله بهینه سازی غیر خطی تبدیل می شود که حل آن بسیار مشکل است . لذ ا برای ساده کردن محاسبه از تئوری لحظه ها کمک می گیریم تا مسئله را به ماتریس LMI تبدیل کند که در بخش بعدی بررسی می کنیم .

د : تئوری لحظه ها :

در [5] دو مسئله کلاسیک زیر را در نظر بگیریم :

Global minimization

$$\mathbb{p} \to p^* := \min_{x\in R} p(x) \qquad (۱۵)$$

Constrained optimization

$$\mathbb{p}_K \to P^*_K := \min_{X\in K} P(X) \qquad (۱۶)$$

اینجا :

$$p(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad (۱۷)$$

ارزش واقعی چند جمله ای است , و ضروری نیست که حتما محدب باشد . در آخر با استفاده از نا مساوی چند جمله ای مجموعه را خلاصه تر می کنیم .

$$g_i\,(x) \geq 0\,.\ i = 1. \dots\dots r \qquad (۱۸)$$

برخی تعریف ها را در [5] بیان شده است که نیاز به شرح تئوری Lasser داریم . فرض کنید :

$$1. x_1. x_2. \dots. x_n. x_1^2. x_1x_2. \dots. x_1x_n. \dots. x_2x_3. \dots. x_1^m. \dots. x_n^m \qquad (۱۹)$$

در اصل m درجه واقعی چند جمله ای $P(X)$ است , فرض می کنیم $s(2m)$ هم اندازه آن است .پس می توانیم چند جمله ای $P(X)$ را مانند زیر بنویسیم :

$$\mathrm{P(X)} = \sum_a \mathrm{P_a X^a} \qquad (۲۰)$$

در زیر چند ضریب a مشخص شده است :

$$a := a_1. a_2. \dots. a_1 \qquad (۲۱)$$

S (2m) , و بردار $y := \{y_\propto\}$ با عضو اول $y_{0.\dots.0} = 1$ را داریم . فرض کنید $M_\mathrm{m}(\mathrm{y})$ ماتریس لحظه ای به اندازه $s(m)$ است . برای توضیح بیشتر $M_m(y)$ مثال عددی می زنیم , اینجا $n=2$ در ماتریس $M_\mathrm{m}(\mathrm{y})$ است که شامل ماتریس بلوک *می باشد* .

$$\{M_{i.j}(y)\}.0 \ \leq \mathrm{i}\,.j \ \leq 2m \qquad (۲۲)$$

این گونه تعریف می شود :

$$M_{\mathrm{i,j}}(\mathrm{y}) = \begin{pmatrix} Y_{i+j.0} & Y_{i+j-1.1} & \cdots & Y_{i.j} \\ Y_{i+j-1.1} & Y_{i+j-2.2} & & Y_{i-1.j+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ Y_{i.j} & Y_{i-1.j+1} & \cdots & Y_{0.i+j} \end{pmatrix} \qquad (۲۳)$$

اینجا $Y_{i.j}$ مرتبه لحظه ای (i + j) را نشان می دهد :

$$Y_{\mathrm{i.j}} = \int \mathrm{X^i X^j} \mu(\mathrm{d(x.y)}) \qquad (۲۴)$$

برای μ احتمالاتی را بیان می کنیم :

مفروض است $g(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک چند جمله ای واقعی با درجه ω و ضریب $g \in \mathbb{R}^{s(\omega)}$ باشد . اگر(i + j) را در Y_B ماتریس $M_\mathrm{m}(\mathrm{y})$ وارد شود . و فرض کنید که $\beta(i.j)$ با اندیس β در ماتریس Y_β نشان داده شود . ماتریس $M_\mathrm{m}(\mathrm{gy})$ به صورت زیر تعریف می شود :

$$M_\mathrm{m}(\mathrm{gy})_{\mathrm{i.j}} = \sum_a \mathrm{q_a y\{\beta(i.j) + a\}} \qquad (۲۵)$$

(۲۶)

$$M_1(y) = \begin{pmatrix} 1 & Y_{1.0} & Y_{0.1} \\ Y_{1.0} & Y_{2.0} & Y_{1.1} \\ Y_{0.1} & Y_{1.1} & Y_{0.2} \end{pmatrix}$$

و

$$g(x): x \to a - X_1^2 - X_2^2 \qquad (۲۷)$$

بدست می آید:

(۲۸)

$$M_1(gy) = \begin{pmatrix} a - Y_{2.0} - Y_{0.2} & aY_{1.0} - Y_{3.0} - Y_{1.2} & aY_{0.1} - Y_{2.1} - Y_{0.3} \\ aY_{1.0} - Y_{3.0} - Y_{1.2} & aY_{2.0} - Y_{4.0} - Y_{2.2} & aY_{1.1} - Y_{3.1} - Y_{1.3} \\ aY_{0.1} - Y_{2.1} - Y_{0.3} & aY_{1.1} - Y_{3.1} - Y_{1.3} & aY_{0.2} - Y_{2.2} - Y_{0.4} \end{pmatrix}$$

فرض کنید $g_i(x) = \omega_i$ است . ϖ_i به صورت زیر تعریف می شود

$$\varpi_i = \left[{}^{\omega_i}/_2\right] \qquad (۲۹)$$

در اینجا کوچکترین عدد صحیح , بزرگتر یا مساوی ${}^{\omega_i}/_2$ است .

Lasser ثابت می کند , فرمول (۱۶) معادل با مسئله Q_K^N است که با زبان تئوری لحظه ها و LMI.$_S$ نوشته شده است .

$$Q_K^N: \begin{cases} \inf_y \ \sum_a p_a y_a \\ \text{با شرط :} \\ M_n(y) \geq 0 \\ M_{n-\varpi_i}(g_i y) \ \geq 0 \,.\, i = 1. \dots . r \end{cases} \qquad (۳۰)$$

عدد N وضعیت زیر را ایجاد می کند :

$$N \ > \ \left[{}^{m}/_2\right] . N \ > max_i \varpi_i \qquad (۳۱)$$

اثبات :

$$N \ \to \ \infty \ \Rrightarrow \inf Q_K^N \ \uparrow \ \ P_K^* \qquad (۳۲)$$

با استفاده از lasser , Q_K^N را به شکل فرمول دو گانه در می آوریم :

$$Q_K^N = \begin{cases} inf_{x.z_i} + x(1.1) + \sum_{i=1}^{r} g_i(0) z_i(1.1) \\ \text{با شرط :} \\ \langle \mathrm{x}.\,\beta_\alpha \rangle + \sum_{i=1}^{r} \langle z_i + c_{i\alpha} \rangle = \mathrm{p}_\alpha\,. \quad \alpha \neq 0 \\ \mathrm{x}.\,\mathrm{z_i} \geq 0\,. \quad \mathrm{i} = 1. \dots . \mathrm{r} \end{cases} \tag{۳۳}$$

$\langle . \rangle$ اثر داخلی حاصل ضرب را نشان می دهد , برای مثال :

$$\langle x\,.\; B_\alpha \rangle = \mathrm{tr}\;\mathrm{x}\mathrm{B}_\alpha \tag{۳۴}$$

اگر $\mathrm{M_M(y)}$ و $M_{\mathrm{N}-\varpi_\mathrm{I}}(\mathrm{g_i y})$ به فرم زیر نوشته شود , ماتریس $C_{i\alpha}$ و B_α به راحتی حل می شود :

$$M_{\mathrm{M}}(\mathrm{y}) = \mathrm{B}_0 + \sum_{\alpha \neq 0} \mathrm{B}_\alpha \mathrm{Y}_\alpha\,. \tag{۳۵}$$

$$M_{\mathrm{N}-\varpi_\mathrm{i}}(\mathrm{g_i y}) = \sum_{\alpha \neq 0} \mathrm{C}_{\mathrm{i}\alpha} \mathrm{y}_\alpha \tag{۳۶}$$

علاوه بر این , (۲۸) ثابت می کند که آن برای N به اندازه کافی بزرگ است . و اگر K داخلی و نا تهی باشد , هیچ فضای خالی دو گانه بین $Q_{\mathrm{K}}^{\mathrm{N}}$ و $\left(\mathrm{Q_K^N}\right)^*$ وجود ندارد .

بر اساس نتایج بدست آمده , بهترین راه برای محاسبه (۱۱) و تخمین ناحیه جذب استفاده از توابع درجه دوم لیاپانوف است[6] . برای تخمین ناحیه جذب مانند زیر عمل می کنیم :

$$\mathrm{g} = \begin{cases} \mathrm{min} \mathrm{v_v}(\mathrm{x}) = \mathrm{min} \frac{\mathrm{N_v}}{\mathrm{D_v}} \\ \text{با شرط :} \\ \dot{V_v}(x) = \frac{\widetilde{N}}{\widetilde{d}} = 0\,. \quad x \neq 0\,. \end{cases} \tag{۳۷}$$

$\widetilde{\mathrm{N}}$ و $\widetilde{\mathrm{D}}$ مانند زیر محاسبه می شود :

$$\widetilde{N} = [(1 + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{v}-2} \mathrm{Q_i}) \sum_{\mathrm{i}=2}^{\mathrm{v}} (\nabla \mathrm{R_i})^{\mathrm{T}} - (\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{v}-2} (\nabla \mathrm{Q_i})^{\mathrm{T}}) \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{v}} \mathrm{R_i}\;]\mathrm{F(x)}. \tag{۳۸}$$

$$\widetilde{D} = (1 + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\infty} \mathrm{Q_i})^{\;2} \tag{۳۹}$$

مسئله بهینه سازی (۳۷) برای تخمین ناحیه جذب با روش LMI مناسب نمی باشد , دوما V_{v} و $\dot{V}_{\mathrm{v}}$ توابع چند جمله نمی باشند . با این حال , با در نظر گرفتن N_{v} و D_{v} , $\widetilde{N}$ و $\widetilde{D}$ به عنوان چند جمله ای می توان مسئله (۳۷) را دوباره باز نویسی کرد :

$$\widetilde{\mathrm{D}} = (1 + \sum_{i=1}^{\infty} Q_i)^2 \tag{۴۰}$$

$$\begin{cases} C^* = \min c \\ \text{با شرط :} \\ N_v(x) - CD_v(x) = \sum_{i=2}^{v} R_i - C\ (1 + \sum_{i=1}^{v-2} Q_i) = 0 \\ \widetilde{\mathrm{N}} = 0\ .\ \widetilde{\mathrm{D}} \neq 0\ .\ \widetilde{\mathrm{X}} \neq 0 \end{cases} \qquad (۴۱)$$

هر جا تابع هدف به اندازه محدودیت چند جمله باشد می توان مسئله تخمین ناحیه جذب را با مسئله بهینه سازی LMI حل کرد.

ذ : مدل اقتصادی

در این بخش یک مدل اقتصادی که بازار کالا و بازار پول را بررسی می کند را معرفی می کنیم , مهم ترین متغیر در اقتصاد کلان تولید ملی است . یک روش کلی برای محاسبه تولید ملی روش هزینه ها است , که در اینجا از این روش استفاده شده است .

سیستم (۱) را در نظر بگیرید , در [7] سیستم زیر را داریم :

$$\begin{cases} \dot{y} = \alpha(e - y) \\ \dot{\mathrm{r}} = \beta(m_{\mathrm{d}} - \mathrm{m_s}) \end{cases} \qquad (۴۲)$$

اینجا , y تولید است , e قیمت , r نرخ بهره , m_{d} تقاضای پول , $\mathrm{m_s}$ عرضه پول است که به عنوان ورودی مساوی صفر است . α و β ضرایب ثابت هستند . هزینه کل به صورت زیر بدست می آید :

$$e = c\ (y) + i(r,y) + g\ , \qquad (۴۳)$$

$$m_d = l(r.y)$$

C هزینه مصرف است , i سرمایه گذاری است , g هزینه دولت است که به عنوان ورودی مساوی صفر در نظر گرفته می شود .به طور کلی , در این مدل برخی از شرایط در نتیجه تحلیل های اقتصادی بدست آمده است .
خروجی مدل اقتصادی به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x\ ((x-1)(x-3) + {}^{1}\!/_{2}\, y) \\ \dot{\mathrm{y}} = \mathrm{y}(-2.1 + \mathrm{x}) \end{cases} \qquad (۴۴)$$

در (۳۹) فرض می کنیم , $a = 4y^2 - 3y$ و $i = -y^3 - {}^{1}\!/_{2}\, yr$ و $l = -2.1r + ry$ است , در این سیستم دو نقطه تعادل وجود دارد [2.1,1.98] , برای راحتی تخمین ناحیه جذب این نقاط را به مبدا مختصات انتقال می دهیم :

$$\begin{cases} u = x - 2.1 \\ \mathrm{v} = \mathrm{y} - 1.98 \end{cases} \qquad (۴۵)$$

حال , جا گذاری می کنیم :

$$\begin{cases} \dot{u} = -0.42u - 1.05v - 2.3u^2 - 0.5uv - u3 \\ \dot{\mathrm{v}} = +1.98\mathrm{u} + \mathrm{uv} \end{cases} \qquad (۴۶)$$

نتیجه می گیریم در کشور با هر سطح از تولید و نرخ بهره خروجی با گذشت زمان به نقطه تعادل میل می کند در مرحله اول تابع لیاپانوف با درجه ۴ را از طریق سیستم (۱۰) و (۱۱) با روش بازگشتی مانند زیر بدست می آید :

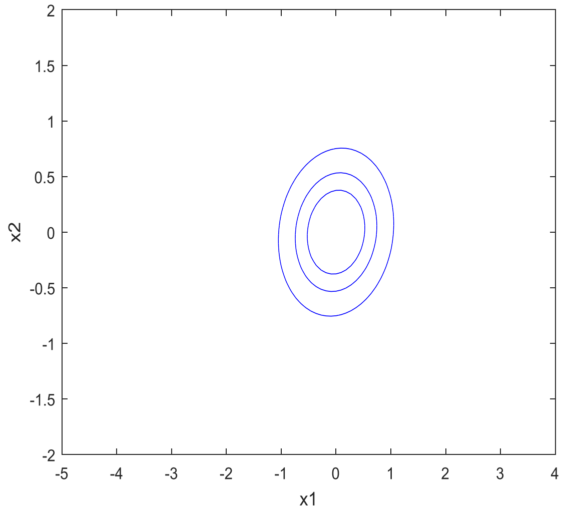
$R_2 = 3.435u^2 + 0.9524uv + 1.923v^2$
$R_3 = -0.8839u^3 + 4.029u^2v + 0.5133uv^2 + 0.105v^3$
$R_4 = 0.1622u^4 + 0.653u^3v + 1.354u^2v^2 - 0.3321u^2v^2 + 0.105v^4$
$Q_1 = 0.461u - 0.756v$
$Q_2 = -0.5346u^2 - 0.7059uv + 0.0257v^2$

پس داریم :

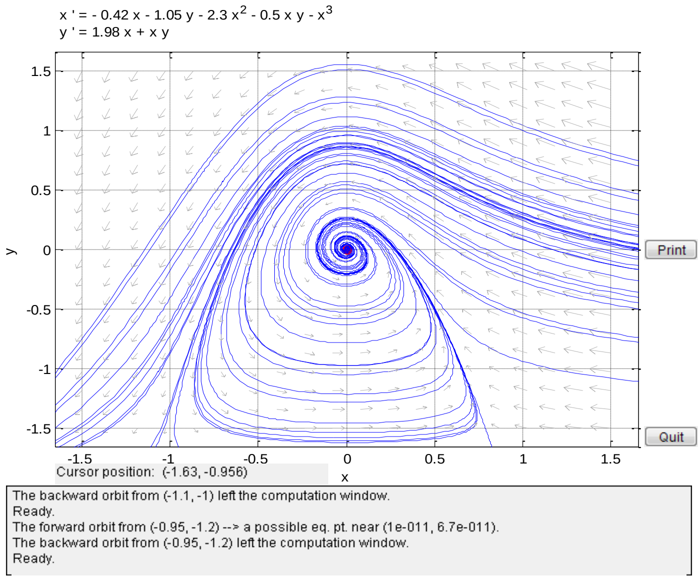
$$V_4(x) = \frac{R_2 + R_3 + R_4}{1 + Q_1 + Q_2}$$

برای حل (۴۱) از SEDUMI /pplane8/ sostools در متلب استفاده می کنیم و در نتیجه با $V_4(\mathrm{i.e.}\,\dot{V}_4(x) = 0)$ می توان محدوده جذب بزرگتری را بدست بیاوریم . با این ابزار در متلب می توان بهترین کاندید لیاپانوف را برای سیستم اقتصادی بدست تخمین زد و نشان داد مانند شکل ۱ . سپس با استفاده از pplane8 نواحی پایدار و نا پایدار و نقاط تعادل و خط سیر آنها روی صفحه فازوری نشان داده و مورد بررسی قرار می دهیم مانند شکل ۲ و ۳ .

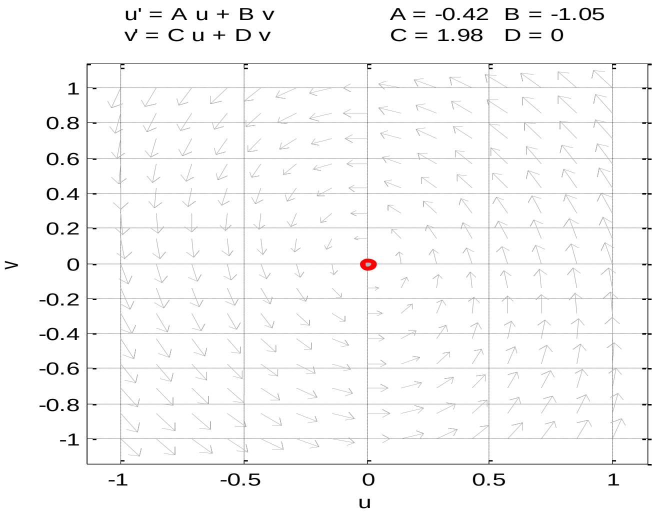
$$V(X) = 1.8218X_1^2 - 0.505X_1X_2 + 3.5364X_2^2$$



شکل ۱: تخمین بزرگترین ناحیه جذب



شکل ۲ : ناحیه جذب



شکل ۳ : تصویر فازوری و نقطه تعادل

نتیجه گیری

در این مقاله روش جدیدی برای تخمین ناحیه جذب برای یک مدل اقتصادی غیر خطی ارائه شده است . در ادامه برای پیدا کردن تابع لیاپانوف از روش جدید و آسان استفاده شد , و مسئله تخمین ناحیه جذب را با تئوری لحظه ها به مسئله LMI تبدیل و حل شد . در کارهای آینده در نظر داریم مدل های کلی تر و توابع مناسب تری برای تخمین ناحیه جذب ارائه دهیم .

REFRENCES

[1] F. Amato, C. Cosentino and C. Cosentino, “On the region of attraction of nonlinear quadratic systems,” Automatica, Vol. 43, No. 12, pp. 2119-2123, 2007

[2] O. Hachicho, "A novel LMI-based optimization algorithm for the guaranteed estimation of the domain of attraction using rational Lyapunov functions," The Franklin Institue, pp. 535- 552 , feb. 2006.

[3] A. Vannelli and M. Vidyasagar, "Maximal Lyapunov function and domain of attraction for Autonomous Nonlinear Systems,"Automatica, Vol. 21, No. 1, pp. 69-80, 1985.

[4] H.K. Khalil, Nonlinear Systems, MacMillan, New York, 1992.

[5] J. B. Lasserre, “Global optimization with polynomials and the problem of moment,” SIAM J. OPTIM., Vol. 11, No. 3, pp.796-817.

[6] O. Hachicho and B. Tibken "Estimating domains of attraction of a class of nonlinear dynamical systems with LMI methods based on the theory of moments" in Proc. CDC, 2002, pp. 3150-3155.

[7] R. shone, An introduction to economic dynamics, Cambridge university press, Cambridge, 2003